ねじれクリスタリン表現の充満忠実性定理について

京都大学数理解析研究所　小関 祥康*

概 要

クリスタリン p 進表現の成す圏からのある「制限」関手が忠実充満であるという Kisin により示された定理がある（Breuil 予想）．その定理のねじれ表現版について分かったことを紹介する．

本稿は 2012 年に開催された「第 7 回福岡数論研究集会」に於ける筆者の講演を基に書かれたものである．講演の機会を与えていただいたオーガナイザーの方々に厚く感謝御礼申し上げたい．

1　はじめに

さまざまな数論的対象が与えられたとき，それらに対応して多くの場合に Galois 表現が構成でき，Galois 表現を調べればもとの数論的対象に関する多くの情報や意外な一面を見ることができる．有名な例としては，志村・谷山予想 - 特に Fermat 予想 - が挙げられる．楕円曲線と保型形式という一見つながりの見えない二つの分野が密接に関わりあっているというこの予想は，二つの分野を Galois 表現を用いてつなげることによって証明された．本稿はその Galois 表現に関連して得られた結果について述べるものであるが，いきなり主張に入るのではなく，まずは本稿の主結果の背景にある「Galois 表現の分類」の話からはじめていこうと思う．

さて，一言に Galois 表現といってもその定義は一意的ではなく，大雑把にいえば「Galois 群が作用する加群」のことをまとめて Galois 表現と呼んでいる．その中でも数論（幾何）においてよく登場する Galois 表現として，いわゆる “l 進表現” と “p 進表現” というものがある．これもまた人によって意味合いが微妙に異なるが，ここでは次の意味で考える：K を標数 p の完全体を剰余体として持つ混標数の完備離散付値体とし，G_K を K の絶対 Galois 群とするとき，G_K が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_l$ ベクトル空間を G_K の l 進表現と呼ぶ．$l=p$ の時の l 進表現を定義通り p 進表現と呼ぶわけだが,「p 進表現と l 進表現」と言ったら暗に $l \neq p$ を意味していることも多い．これらに関して，$l \neq p$ の時の l 進表現の研究は多くの場合に非常に進んでおり，反対に p 進表現については一般には難しいことが多い．そんな p 進表現の研究は，1970 年頃に Fontaine が p 進周期環と呼ばれるいくつかの巨大な環たちを導入し「クリスタリン」「準安定」「de Rham」等の概念を定式化したことによって，着実に進展してきた．これらの定義を説明するのは本稿では行わない（[Tsu] 等を参照）．気持ちだけ簡単に説明すると，$l(\neq p)$ 進表現側の

$$\{\text{不分岐表現}\} \subset \{\text{冪単表現}\} \subset \{\text{潜在的冪単表現}\}$$

*e-mail: yozeki@kurims.kyoto-u.ac.jp
本研究は科学研究費補助金（No. 23840028）による支援を受けております．

という概念たち[1]が，p 進表現側の

$$\{\text{ クリスタリン表現 }\} \subset \{\text{ 準安定表現 }\} \subset \{\text{de Rham 表現 }\}$$

と対応している．また，幾何的性質とのつながりに関して良く知られていることを一つ挙げると，次の事実が知られている．

- K 上のアーベル多様体 A に対して以下は同値：
  - A が良い還元を持つ（準安定還元を持つ）；
  - 任意の $l \neq p$ に対して l 進 Tate 加群 $T_l(A)$ は不分岐（冪単）；
  - p 進 Tate 加群 $T_p(A)$ はクリスタリン（準安定）．

さて，Fontaine はクリスタリン表現の集まりと準安定表現の集まりを線形データで分類することに成功した．その対応は次のように述べられる．

$$\{\text{ クリスタリン表現 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 弱許容フィルター付き } \varphi \text{ 加群 }\}$$
$$\{\text{ 準安定表現 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 弱許容フィルター付き } (\varphi, N) \text{ 加群 }\}$$

ここで，フィルター付き (φ, N) 加群のモノドロミー N が $N = 0$ のときがフィルター付き φ 加群であり，従って準安定表現がクリスタリンかどうかは対応するフィルター付き (φ, N) 加群の N が 0 かどうかで判定できる．

とにかく，クリスタリンや準安定な p 進表現が線形データで分類できるということを述べた．では，クリスタリンや準安定な p 進表現の格子，つまり G_K 作用で安定な部分自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で $\mathbb{Q}_p$ をテンソルすると元の表現に戻るもの，を分類する線形データはどのようなものになるのだろうか．これができれば上の Fontaine による分類よりもより精密なものが得られるはずである．実際，格子の情報から元の p 進表現の情報は $\mathbb{Q}_p$ をテンソルするだけで復元できるからである．さらに「商をとる」操作によって，G_K のねじれ $\mathbb{Z}_p$ 表現，つまり G_K が連続に作用していて加群としては有限 $\mathbb{Z}_p$ 加群であるもの，の考察にも期待が持てるはずである．

この問題に関してはさまざまな研究が進んでいるが，本稿の主結果に関連するものとして Kisin 加群と Breuil 加群[2]と呼ばれるものたちがある（例えば [Kis1]，[Bre3] を参照）．少しこれに関して説明をすることにする．K の素元 π を一つとり，また，$\pi_n \in \overline{K}$ $(n \geq 0)$ を $\pi_0 := \pi$，$\pi_{n+1}^p = \pi_n$ となるようにとり，固定する．$K_\infty := \bigcup_{n \geq 0} K(\pi_n)$ とし，$G_\infty := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty) \subset G_K$ とおく．Kisin 加群，Breuil 加群はそれまで良く使われていた 1 の p 冪乗根を添加して得られる K 上の円分拡大 $K(\mu_{p^\infty})$ よりも，この K_∞ と大変相性が良い．

まず Kisin 加群だが、名前こそ Kisin 加群という名がついているものの，Kisin によってはじめて定義されたというわけではなく（そもそも定義そのものはとても簡単），その加群の基本性質に関する研究自体は 1970 年頃の Fontaine の研究により既に成されていた．その加群が準安定表現の格子と深いつながりを持つということ，また，Breuil による研究を礎に有限平坦群スキームなどと大変相性が良いということを Kisin が [Kis1] の中で示したことにより，その後のさまざまな研究に使われるようになった．とりあえずここでは，Kisin 加群に関する諸性質を簡単に述べる程度に留めておこう．まず，Kisin 加群に対応して G_∞ の表現を定義することができ，それは「自由」Kisin 加群から G_∞ の p 進表現の格子の成す圏への充満忠

[1]Grothendieck の局所モノドロミー定理より，最後の { 潜在的冪単表現 } は { 全ての l 進表現 } に一致している．

[2]一言に Breuil 加群や Kisin 加群といっても人によって定義は若干異なるが細かいことはここではあまり気にしなくても良いと思う．これらの加群の本稿における定義は付録に書いてある．

実な関手を成す．また，Kisin 加群は自然にエタール φ 加群に拡張できる．エタール φ 加群は G_∞ の表現全体（p 進表現，その格子，ねじれ表現）を分類する非常に「見やすい」線形データであり，Fontaine により 1970 年頃に導入された．そして，任意の G_K の準安定表現の格子 T を与えた時に，Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ で T の G_∞ への制限が $\mathfrak{M}$ と対応している表現になるようなものが同型を除いて一意的に存在する．こういった理由などから，準安定表現の格子の考察に Kisin 加群は有用となる．

次に Breuil 加群に関してだが，

$$\{\text{ 準安定表現 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Breuil 加群 }\}$$

という対応がある．また，与えられた Breuil 加群 $\mathfrak{D}$ に上の意味で対応する準安定表現と，更にそれに対応するフィルター付き (φ, N) 加群 D を与えたときに，$\mathfrak{D}$ から D を具体的に計算することができる（逆に D から $\mathfrak{D}$ の計算も容易）．特に，準安定表現がクリスタリンかどうかは対応する Breuil 加群の情報からすぐに確認できることが分かるので，上の対応はクリスタリン表現の分類も本質的にはできているということになる．Breuil 加群の利点の一つとして，整数 $0 \leq r < p-1$ を固定した時に，Breuil 加群には "重み r" の「格子」「ねじれ」といった概念が定義でき，特に格子に関しては

$$\{\text{Hodge-Tate 重み } [0,r] \text{ の準安定表現の格子 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 重み } r \text{ の Breuil 加群の格子}^3\}$$

という分類ができることが知られている（[Liu2]）．ここで，Breuil 加群の格子の定義には $0 \leq r < p-1$ という仮定が必要となってしまうためあまり大きい Hodge-Tate 重みを扱うことができないということに注意しよう．

そこで，こういった問題を回避できるものとして，Liu は [Liu3] の中で Liu 加群[4]を定義した．Liu 加群は Kisin 加群に適当な Galois 作用を与えることで定義されるものであり，全ての整数 $r \geq 0$ に対して定義することができ，さらに任意の r に対して

$$\{\text{Hodge-Tate 重み } [0,r] \text{ の準安定表現の格子 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 高さ } r \text{ 以下の Liu 加群 }\}$$

という分類ができる．$r < p-1$ である必要がないというのが大きな特徴である．では Liu 加群は万能なのかと言われると現状ではまだそう断言することは厳しい．たとえば，Liu 加群の定義には性質が調べにくい環 "$\widehat{\mathcal{R}}$"（定義は付録参照）が必要とされているため，具体計算には向いていないといった問題がある．

Liu 加群はまだあまり認知度が高くないように思えるが，応用は色々と見つかっている．例をあげると次のようなものがある：

- ねじれ準安定表現の上付き分岐指数の bound（[CL2]）．
- Hilbert 保型形式に付随する局所・大域整合性（[Liu4]）．
- Kisin 加群と p 可徐群スキームや有限平坦群スキームとの圏同値の $p = 2$ の場合の証明（[Liu5]）．
- Serre 予想の weight part（[GLS]）．

[3] 多くの論文では strongly divisible lattice とか strongly divisible module とか書かれているもの．

[4]（現時点では）Liu 加群というのは本稿独自の呼び回しで，[Liu3] 等の論文では $(\varphi, \hat{G})$ 加群と呼ばれているもの．

次の節で述べる本稿の主結果は Liu 加群を用いて得られたものである．

本稿の構成について述べようと思う．次の第 2 節で本稿の主定理の背景に関連した話と主定理の主張について述べる．第 3 節で証明の概説を述べる．この第 3 節まででで本稿の目的は達せられているといって良いのだが，最後に付録として Liu 加群の定義と性質について書いた．Liu 加群の定義について日本語で書かれている文献はまだ見受けられないように思えるというのが付録を書いた主な理由である．主定理の証明の鍵となる命題についてもこの付録の最後に述べている．

2 主定理と先行結果

K を標数 $p>2$ の完全体を剰余体として持つ混標数の完備離散付値体とする．K の素元 π を一つとり，また，$\pi_n \in \overline{K}$（$n \geq 0$）を $\pi_0 := \pi$，$\pi_{n+1}^p = \pi_n$ となるようにとり，固定する．$K_\infty := \bigcup_{n\geq 0} K(\pi_n)$ とし，$G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \supset G_\infty := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ とおく．一般に位相群 H に対し，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H)$ で H が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間の成す圏とし，$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(H)$ で H が連続に作用する有限ねじれ $\mathbb{Z}_p$ 加群の成す圏とする．今，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ の充満部分圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ をクリスタリン表現からなる圏とすると，次の結果が知られている（Breuil 予想，[Bre2]）．

定理 1 ([Kis1], Corollary 2.1.14)**.** 制限関手（即ち，群の作用を制限することにより定義される関手）

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_\infty)$$

は充満忠実.

この結果の不思議な点について少しだけ述べようと思う．まず，定理の主張の「クリスタリン」を「準安定」に取り換えると充満忠実性は成り立たないことが直ぐに分かる．実際，π に付随する Tate 曲線の p 進 Tate 加群（これはクリスタリンではないが準安定）と，円分指標と自明な指標との直和 $\chi_p \oplus \mathbf{1}$（これはクリスタリン） は，G_K の表現としては同型ではないが G_∞ の表現としては同型になってしまう．つまり「クリスタリン」は本質的な条件であるといえる．また，G_∞ は K_∞ という K 上の APF 拡大の絶対 Galois 群だが，これを K 上の円分拡大体 $K(\mu_{p^\infty})$ の絶対 Galois 群に置き換えると上述の充満忠実性はやはり成り立たない．実際この場合は p 進円分指標の制限関手による像は自明な指標になってしまうからである．このあたりに K_∞ という体の特殊性が感じられる．この p 進表現に対する充満忠実性定理は，Breuil によって p 可徐群スキームの考察から予想がなされ，Hodge-Tate 重みや K に対する条件付きで部分的に Breuil により示されていたものだったのが（[Bre2]，[Bre3]），その後 Kisin によって完全に一般の場合に示された形となった．

本稿の主結果は，上記の定理 1 のねじれ表現類似を考察し得られた結果である．早速主張を述べようと思う．e を K の絶対分岐指数，$r, r' \geq 0$ を整数とし，$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ の充満部分圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},r}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ を Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下のねじれクリスタリン表現からなる圏とする．ここで，ねじれ表現 $T \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ が Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下のねじれクリスタリン表現であるとは，ある Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下の p 進表現 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ と G_K 安定な V の $\mathbb{Z}_p$ 格子 $L \subset L'$ が存在して，$T \simeq L'/L$ となる時をいう．V の選び方は

一意ではないので，“ねじれ表現 T の Hodge-Tate 重み” という概念が一意的に定まっているわけではないということには注意していただきたい.

以下が本稿に於ける主定理であり，そこから下の系が直ちに従う：

定理 2 ([O2], Theorem 1)**.** $er < p-1, e(r'-1) < p-1$ とし，$T \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K)$，$T' \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r'}(G_K)$ とする．この時，$\mathbb{Z}_p$ 線形写像 $f\colon T \to T'$ が G_∞ 作用と可換ならば，実は G_K 作用と可換.

系 3 ([O2], Theorem 1)**.** $er < p-1$ の時，制限関手

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$$

は充満忠実.

定理 1 の直後に書いたこととほとんど同様の理由で,「クリスタリン」を「準安定」に取り換えたり，G_∞ を $K(\mu_{p^\infty})$ の絶対 Galois 群に置き換えたりした場合にはやはり充満忠実性は成り立たないことが分かる．この系に現れる制限関手 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ は，以下のもとで充満忠実になることが既に知られていた：

- $e=1$，$r<p-1$（[Bre2], Théorèm 5.2 の証明）.
- $e \geq 1$，$r \leq 1$（[Bre3], Theorem 3.4.3)（※ $er<p-1$ である必要はない）.

こういった結果の具体的な応用例としては，例えば（二つ目の方は）有限平坦群スキームのモジュライの構成などに用いられている（[Kis2]）．本稿に於ける主定理は上の一つ目の方を改良したものとなっている.

注意 4. この節では $p>2$ と仮定しているが，実際には定理 2 と系 3 は $p=2$ でも正しい. ただし，この場合は既に知られている結果の特殊な場合となる．実際，上述の [Bre3] の結果が $p=2$ でも正しいことが確認されている（例えば，[Kim], Corollary 4.4）.

今回の充満忠実性定理（＝系 3）から考えられる自然な問題として，主張の中に現れる仮定『$er<p-1$』は本当に必要な仮定なのかということが考えられる．つまり，Kisin による定理 1 のように，本当は，系 3 の中に現れているねじれ表現の場合の制限関手の充満忠実性は任意の e, r で成り立つのではないだろうかということが気になるところとなるが，結果として，これは成り立たないことがわかった.

命題 5 ([O2], Proposition 10, 12, 13)**.** K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．以下のいずれかの条件の下では，制限関手 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ は（忠実だが）充満ではない：

1. $\mu_p \subset K$ であり，$\mu_{p^s} \subset K$ なる最大の整数 $s \geq 1$ に対して $K(\mu_{p^{s+1}})/K$ は分岐し，$r \geq p+1$ の場合.（ここで，μ_{p^n} は 1 の p^n 乗根の成す集合.）
2. $\pi \in \mathrm{Norm}_{L/K}(L^\times)$，$r \geq p$ の場合.（ここで，L は $K(\mu_{p^\infty})/K$ の中の K 上のただ一つの p 次拡大.）

2. $\pi \in \mathrm{Norm}_{L/K}(L^{\times})$, $r \geq p$ の場合.

3. $K = \mathbb{Q}_p$, $r \geq p$ の場合.

突然 K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大と仮定したが，これは証明に類体論や Serre 予想を使うためである．また実際にはその証明方法から，上の命題は G_∞ を $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\pi_1))$ に置き換え，同時に「ねじれ表現」を「p 倍で消える表現」に置き換えても成り立つことが分かっている．

例 6. $K := \mathbb{Q}_p, r := p, \pi := p = \mathrm{Norm}_{L/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^2})/L}(1-\zeta_{p^2}))$ のとき，命題 5 より制限関手 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},p}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p}) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ は充満忠実ではない．この時は $e = 1$ である．よって e や r がそれほど大きくない場合であっても制限関手は充満忠実ではないことがあることがわかる．$e(r-1) = p-1$ であることにも注意しよう（以下の問題 8 の根拠の一つになる）．

注意 7. 命題 5 の二つ目の主張からも察せられるように，そもそも，制限関手 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},r}_{\mathrm{tor}}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ の充満忠実性が K の素元の p 冪根の系 $(\pi_n)_{n\geq 0}$ の取り方に依っていないのかどうかということは実は自明ではないことに注意されたい．ただし，素元 π を固定し，π のある p 冪根の系 $(\pi_n)_{n\geq 0}, \pi_0 = \pi$ に対して制限関手の充満忠実性が確認できたならば，別の π の p 冪根の系 $(\pi'_n)_{n\geq 0}, \pi'_0 = \pi$ に対しても充満忠実性が成り立つことは容易に確認できる（※ $K'_\infty := \bigcup_{n\geq 0} K(\pi'_n)$，$G'_\infty = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K'_\infty)$ と置いたときに，G_∞ と G'_∞ が G_K の元で共役であることから分かる）．したがって，π_0 の取り方を変えた場合が問題ということになる．なんにせよある種の『素元の取り換え』議論とでも言うべきものが欲しいところだが，それに関してはまだ良く分かっていない．

以上の話を基に，充満忠実性が e と r に関する条件のみで綺麗に述べられるとするならば，どのような条件になるべきだろうか．系 3 の後に述べた Breuil による結果も考慮すれば，充満忠実性に関して，次の形で問題を提案することが妥当であるように思われる．

問題 8. 以下は同値か？

1. $e(r-1) < p-1$.
2. 制限関手 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},r}_{\mathrm{tor}}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ は充満忠実.

この問題そのものは $p = 2$ に関しても，意味を持っている．少なくとも筆者は現在，問題 8 が正しくないという反例を $p = 2$ の場合も含めて知らない．

3　証明について

定理 2 の証明について少しだけ述べたい．系 3 の直後に Breuil による先行結果を述べたが，その証明方法はねじれクリスタリン表現を有限平坦群スキームや Fontaine-Laffaille 理論を経由することによって考察するというものであり，そのために $r = 1$ であったり $e = 1$ であったりといった仮定が必要となっていた．筆者はより一般の e や r に対して議論を進めたかったので，それらの理論の代わりに Liu 加群を用いた．さて，1 節で述べたように本来 Liu 加群は準安定表現の格子を分類するものだが，その後の研究によりねじれ準安定表現やねじれクリスタリン表現の考察にも使えることが分かってきた．本稿における主定理はねじれクリスタリン表現に対応する Liu 加群とその下の Kisin 加群を考察することにより得られる．大ざっぱにいえ

ば，次のようなことを考えることにより定理 2 を得た：制限関手 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ が充満忠実を示すということは，与えられた二つの G_K 表現の間の G_∞ 作用と可換な射が自動的に G_K 作用と可換になるかということを示すことになる．そこで，その話を線形データ側にうつすと，与えられた二つの Liu 加群の間の Kisin 加群としての射が，自動的に Galois 作用と可換になるかということを示すという話になる（そして得られた結果が命題 25）．それを示す際に，ねじれクリスタリン表現に対応する Liu 加群をとった時に，その下の Kisin 加群への Galois 作用がどのようなものになっているのかということを知る必要があったのだが，それは [GLS] の中で調べられているのでその結果を用いた（定理 21）．

A　Kisin 加群と Liu 加群

この付録では Kisin 加群，Liu 加群の定義と基本性質についてまとめている．ただ残念なことに，諸々の都合により p 進 Hodge 理論に関する基本的な性質については既知のものとして書いてしまったことを初めに謝っておきたいと思う．p 進 Hodge 理論の基礎に関しては [Tsu] 等を参照していただきたい．

この付録の中にはさまざまな加群や環に対してフロベニウスが定義されるが，多くの場合ひとまとめに φ と書いた.「M 上のフロベニウス」であることを強調したいときは φ_M などと書いている．また，一般に位相群 H に対し $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H)$，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(H)$，$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(H)$ でそれぞれ H が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間の成す圏，H が連続に作用する有限自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群の成す圏，H が連続に作用する有限ねじれ $\mathbb{Z}_p$ 加群の成す圏とする．

A.1　Kisin 加群

K を標数 $p \geq 2$ の完全体 k を剰余体として持つ絶対分岐指数 e の混標数完備離散付値体とする．$\mathcal{O}_K$ を K の付値環とする．K の素元 π を一つとり，固定する．また，$\pi_n \in \overline{K}$ ($n \geq 0$) を $\pi_0 := \pi$，$\pi_{n+1}^p = \pi_n$ となるようにとり，固定する．$K_\infty := \bigcup_{n\geq 0} K(\pi_n)$ とし，$G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \supset G_\infty := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ とおく．$\mathfrak{S} := W(k)[\![u]\!]$ とし，$\mathfrak{S}$ のフロベニウス φ を $k \to k, x \mapsto x^p$ から与えられる $W(k)$ のフロベニウスと $u \mapsto u^p$ で定義する．$E(u) \in W(k)[u]$ を π の $K_0 = W(k)[1/p]$ 上の最小多項式とすると，これは e 次の Eisenstein 多項式になる．

（$\mathfrak{S}$ 上の）φ **加群**とは，$\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ で，付加構造として $\varphi_{\mathfrak{S}}$ 半線形写像 $\varphi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$（フロベニウスという）が与えられているもののことを言う．φ 加群の間の射は $\mathfrak{S}$ 加群としての射でフロベニウスと可換なもので定義する．整数 $r \geq 0$ に対し，φ 加群 $\mathfrak{M}$ が**高さ** r であるとは $\varphi_{\mathfrak{M}}$ の線形化 $1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ の余核が $E(u)^r$ で消える時をいう．また，**高さ有限**であるといえばある r が存在して高さ r であることをいう．この定義は $E(u)$ に依存している，つまり π の取り方に依存していることに注意する．高さ r（resp. 高さ有限）の φ 加群の成す圏を $'\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}}$ （resp. $'\mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}}$）と書くことにする．

定義 9. $\mathfrak{M}$ を高さ r （resp. 高さ有限）の $\mathfrak{S}$ 加群として有限な φ 加群とする．
(1) $\mathfrak{M}$ が十分大きい $n > 0$ に対して $p^n\mathfrak{M} = 0$ で，かつ u ねじれ元無しである時，$\mathfrak{M}$ を**ねじれ Kisin 加群**であるいう．
(2) $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{S}$ 加群として自由である時，**自由 Kisin 加群**であるという．

ねじれ Kisin 加群と自由 Kisin 加群のことをまとめて単に **Kisin 加群**と呼ぶ．高さ r（resp. 高さ有限）のねじれ Kisin 加群の成す圏を $\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}_\infty}$（resp. $\mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}_\infty}$）とし，高さ r（resp. 高さ有限）の自由 Kisin 加群の成す圏を $\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}}$（resp. $\mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}}$）と書く．定義から $\mathrm{Mod}^0_{/\mathfrak{S}_\infty} \subset \mathrm{Mod}^1_{/\mathfrak{S}_\infty} \subset \cdots \subset \mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}_\infty}$ が成り立つ．自由 Kisin 加群に関しても同様である．Kisin 加群に関連した線形代数的な性質で基本的なことの多くは [Liu1] の §2 や [Fon] の B などに書いてあるが，特に次の命題が役に立つことが多い．

命題 10 ([Liu1], Proposition 2.3.2)**.** $\mathfrak{M} \in {}'\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}}$ が 十分大きい p の冪で消えているとすると，次は同値：

1. $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}_\infty}$.
2. 自由 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{N}_1$ と $\mathfrak{N}_2$ と $\mathfrak{S}$ 加群としての完全列 $0 \to \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_2 \to \mathfrak{M} \to 0$ が存在.
3. 自由 Kisin 加群 $\mathfrak{N}_1$ と $\mathfrak{N}_2$ と φ 加群としての完全列 $0 \to \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_2 \to \mathfrak{M} \to 0$ が存在.
4. ${}'\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}}$ の中での増大列
$$0 = \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$$
で，任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_{i-1} \in {}'\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}}$ かつ $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_{i-1}$ が有限自由 $k[\![u]\!]$ 加群（よってねじれ Kisin 加群）であるようなものが存在.

注意 11. [Liu1], Lemma 2.3.1 と Proposition 2.3.2 を合わせると，上の命題 10 の 4 に現れる各 $\mathfrak{M}_i$ は全て自動的に $\mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}_\infty}$ の元になることが分かる．ねじれ Kisin 加群に関する議論をする際には，この命題を使うことによって p で消えるねじれ Kisin 加群のケースに帰着できることが多い．

与えられた Kisin 加群に付随して G_∞ の Galois 表現が構成できることについて述べる．$R = \varprojlim \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$（射影系は p 乗写像からなる）とおくと，これは剰余体として $\bar{k}$ を持つ標数 p の完全な完備付値環であり，その商体 $\mathrm{Fr}R$ は代数的閉である．$x = (x_n)_{\geq 0} \in R$ の 付値 $v(x)$ は $v(x) = v_p(\lim_{m\to\infty} \widehat{x_m}^{p^m})$ で定義される（ここで，$\widehat{x_m} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ は x_m の任意の持ち上げであり，$\overline{K}$ の付値 v_p は $v_p(p) = 1$ と正規化しておく）．更に $\underline{\pi} = (\pi_n)_{n\geq 0} \in R$ と置き，$[\underline{\pi}] \in W(R)$ を $\underline{\pi}$ の Teichmüller 持ち上げとすると，$W(k)$ 代数の埋め込み $\mathfrak{S} \hookrightarrow W(R)$, $u \mapsto [\underline{\pi}]$ を得ることができ，それは $k(\!(u)\!) \hookrightarrow R$, $u \mapsto \underline{\pi}$ を導く．$k(\!(u)\!)^{\mathrm{sep}}$ を $k(\!(u)\!)$ の $\mathrm{Fr}R$ の中での分離閉包とする．さて，G_K の $\mathrm{Fr}R$ への自然な作用を考えると，その G_∞ への制限は $k(\!(u)\!)^{\mathrm{sep}}$ の $k(\!(u)\!)$ 上の同型を定義し，そうして得られる写像 $G_\infty \to \mathrm{Gal}(k(\!(u)\!)^{\mathrm{sep}}/k(\!(u)\!)) =: G_{k(\!(u)\!)}$ はノルム体の理論より位相同型写像となる．以下 G_∞ と $G_{k(\!(u)\!)}$ を同一視する．

反変関手 $T_{\mathfrak{S}}\colon \mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ を

$$T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, W(R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

で定義する．ここで G_∞ 作用は $(\sigma.f)(x) = \sigma(f(x))$ （$\sigma \in G_\infty, f \in T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$, $x \in \mathfrak{M}$）で定義する．同様に，$T_{\mathfrak{S}}\colon \mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_\infty)$ を

$$T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, W(R))$$

で定義する．これらの関手は次の性質を満たしている．

命題 12. (1) ([CL1], Theorem 2.4.2 of [Liu1]) $T_{\mathfrak{S}}\colon \mathrm{Mod}^r_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_\infty)$ は完全かつ忠実．$er < p-1$ の時は充満忠実.
(2) ([Kis1]) $T_{\mathfrak{S}}\colon \mathrm{Mod}^\infty_{/\mathfrak{S}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_\infty)$ は完全かつ充満忠実.

上の命題（の一部）は原論文に直接主張が書いてあるわけではないので注意．(1) の [CL1], [Liu1] による証明は別で，それぞれ別の理論から得られる系である．前者は Kisin 加群の極大極小理論（Raynaud による群スキームの極大極小理論のある種の一般化）によるもので，後者は $T_{\mathfrak{S}}$ の「弱」充満忠実性定理の系である．

次の命題も直接 [Kis1] に書いてあるわけではないが，その論文内の (1.2.2)，(1.3.8)，(1.3.10)，(1.3.13) を組み合わせると分かる．

命題 13 ([Kis1])**.** V を Hodge-Tate 重み 0 以上の G_K の準安定 p 進表現とし，T を V の G_K 作用で安定な格子とする．このとき，高さ r のある自由 Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ が存在して，$T|_{G_\infty} \simeq T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$.

命題 12 より，上の命題 13 において $\mathfrak{M}$ は同型を除いて一意的に定まることがわかる．

Kisin 加群は有限平坦群スキームや p 可徐群スキームを分類する線形データであるというのが次の定理.

定理 14 ($p>2$：[Kis1], $p=2$：[Kim], [Lau], [Liu5] (各々独立に証明))**.** 次の自然な圏同値がある：

$$\mathrm{Mod}^1_{/\mathfrak{S}_\infty} \simeq \{p \text{ 冪で消える } \mathcal{O}_K \text{ 上の有限平坦群スキーム }\},$$
$$\mathrm{Mod}^1_{/\mathfrak{S}} \simeq \{\ \mathcal{O}_K \text{ 上の } p \text{ 可徐群スキーム }\}.$$

最後に，Kisin 加群には Cartier 双対定理があり，上の定理において群スキームの Cartier 双対定理と両立しているということを注意だけしておきたい（[Liu1]，§3.1）.

A.2 Liu 加群

次に，Liu 加群について述べる（はじめて定義されたのは [Liu3]）．まず，いろいろな論文では「$(\varphi,\hat{G})$ 加群」と呼ばれており「Liu 加群」と書かれている論文は今のところ存在しないので，念のため注意していただきたい．また，この節ではさまざまな Fontaine の p 進周期環を説明無しに扱うことをご了承いただきたい．記号は前小節のものを引き続き使うこととする．S を $W(k)[u]$ のイデアル $(E(u))$ に関する PD-envelope $W(k)[u,\frac{E(u)^i}{i!}]$ の p 進完備化とし，次の付加構造を入れる：

- （フロベニウス）$\varphi_{W(k)}$ 半線形写像 $\varphi\colon S \to S,\ u \mapsto u^p$.
- （モノドロミー）$W(k)$ 線形導分 $N\colon S \to S,\ u \mapsto -u$.

- S の中の減少フィルトレーション $(\mathrm{Fil}^i S)_{i\geq 0}$. ここで，$\mathrm{Fil}^i S$ は $\{\frac{E(u)^j}{j!}; j \geq i\}$ で生成される S のイデアルの p 進位相による閉包.

$S_{K_0} := S[1/p] = K_0 \otimes_{W(k)} S$ と置くと，前小節で定義した $\mathfrak{S} \hookrightarrow W(R)$ は $\mathfrak{S} \hookrightarrow S \hookrightarrow A_{\mathrm{cris}}$ と $S_{K_0} \hookrightarrow B^+_{\mathrm{cris}}$ に延びる．そこで，これらの環を全て B^+_{cris} の部分環とみなすことにする.

1 の p 冪根全体の成す群を $\mu_{p^\infty} \subset \overline{K}$ と書くと $K_\infty(\mu_{p^\infty})$ は K_∞ の K 上の Galois 閉包である．Galois 群たちを $H_K := \mathrm{Gal}(K_\infty(\mu_{p^\infty})/K_\infty), G_{p^\infty} := \mathrm{Gal}(K_\infty(\mu_{p^\infty})/K(\mu_{p^\infty})), \hat{G} := \mathrm{Gal}(K_\infty(\mu_{p^\infty})/K)$ と置く．G_{p^∞} は位相群として $\mathbb{Z}_p$ と同型であることに注意する.

$\hat{G}$ の構造について少し説明しておく．$p > 2$ の時は $K_\infty \cap K(\mu_{p^\infty}) = K$ が常に成り立ち（[Liu2], Lemma 5.1.2），$\hat{G} = G_{p^\infty} \rtimes H_K$，$hg = g^{\chi_p(h)}h, g \in G_{p^\infty}, h \in H_K$ が成り立つ．一方，$p = 2$ の時は $K_\infty \cap K(\mu_{p^\infty})$ は K または $K_1 := K(\pi_1)$ となる（[Liu3], Proposition 4.1.5）．前者の時は $p > 2$ の時と同じことが言える．後者の時は $\hat{G}_1 := \mathrm{Gal}(K_\infty(\mu_{p^\infty})/K_1)$ と置くと $\hat{G}_1 = G_{p^\infty} \rtimes H_K$，$hg = g^{\chi_p(h)}h, g \in G_{p^\infty}, h \in H_K$ である．また，$\hat{G}$ には特に重要な元 τ がある：

- $p > 2$：G_{p^∞} の位相的生成元を一つとり，それを τ とする.
- $p = 2$：$K_\infty \cap K(\mu_{p^\infty}) = K$ のときは G_{p^∞} の位相的生成元を一つとり，それを τ とする．$K_\infty \cap K(\mu_{p^\infty}) = K_1$ の時は $\hat{G} \setminus \hat{G}_1$ の元 で 2 乗したら G_{p^∞} の位相的生成元になるようなものを一つとり，それを τ とする.

今後，任意の $g \in G_K$（あるいは $g \in \hat{G}$）に対して $\underline{\varepsilon}(g) := \frac{g(\pi)}{\pi} \in R$ と書くことにすると，$\underline{\varepsilon}(\tau) \in R$ は 1 の原始 p 冪乗根系を成す．$t = -\log\,[\underline{\varepsilon}(\tau)] \in A_{\mathrm{cris}}$ と置くとこれは B_{dR} の素元になる.

Witt 環の普遍性より，射影 $R \to \overline{k}$ は $\nu\colon W(R) \to W(\overline{k})$ に持ち上がり，さらにこれは $\nu\colon A_{\mathrm{cris}} \to W(\overline{k})$，$\nu\colon B^+_{\mathrm{cris}} \to W(\overline{k})[1/p]$ に延びる．$\nu(u) = \nu(t) = 0$ が定義からすぐに分かる．任意の部分環 $A \subset B^+_{\mathrm{cris}}$ に対して $I_+A := \mathrm{Ker}(\nu \text{ on } B^+_{\mathrm{cris}}) \cap A$ と置く．整数 $n \geq 0$ に対して $t^{\{n\}} = t^{r(n)}\gamma_{\tilde{q}(n)}(\frac{t^{p-1}}{p})$（ここで $n = (p-1)\tilde{q}(n) + r(n)$，$0 \leq r(n) < p-1$，$\gamma_i(x) = \frac{x^i}{i!}$）と定義すると，次の環が B^+_{cris} の部分環として well-defined に定まる：

$$\mathcal{R}_{K_0} := \{\sum_{i=0}^{\infty} f_i t^{\{i\}} \mid f_i \in S_{K_0},\ f_i \to 0\ (i \to \infty)\}.$$

最後に，$\widehat{\mathcal{R}} := \mathcal{R}_{K_0} \cap W(R)$，$I_+ := I_+\widehat{\mathcal{R}}$ とする.

補題 15 ([Liu3], Lemma 2.2.1)**.** (1) $\widehat{\mathcal{R}}$，$\widehat{\mathcal{R}}_{K_0}$ は φ 安定な B^+_{cris} の部分 $\mathfrak{S}$ 代数.
(2) $\widehat{\mathcal{R}}$，I_+，$\widehat{\mathcal{R}}_{K_0}$，$I_+\widehat{\mathcal{R}}_{K_0}$ は G_K 作用で安定で，それは $\hat{G}$ を経由する.
(3) 自然な同型たち $\widehat{\mathcal{R}}_{K_0}/I_+\widehat{\mathcal{R}}_{K_0} \simeq S_{K_0}/I_+S_{K_0} \simeq K_0$，$\widehat{\mathcal{R}}/I_+ \simeq S/I_+S \simeq \mathfrak{S}/I_+\mathfrak{S} \simeq W(k)$ が存在する.

記号の定義が続いたが，ようやく Liu 加群の定義を述べることができるようになった.

定義 16. Liu 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$ とは，Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ であって以下の性質をすべて満たすような $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ 上の $\widehat{\mathcal{R}}$ 半線形 $\hat{G}$ 作用を持つもののことをいう：

- $\hat{G}$ 作用はフロベニウス $\varphi_{\widehat{\mathcal{R}}} \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$ と可換；
- $\mathfrak{M} \subset (\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})^{H_K}$；
- 有限 $W(k)$ 加群 $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}/I_+(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ への $\hat{G}$ 作用は自明.

$\mathfrak{M}$ がねじれ Kisin 加群の時を**ねじれ Liu 加群**と呼び，$\mathfrak{M}$ が自由 Kisin 加群の時を**自由 Liu 加群**と呼ぶ．Liu 加群の高さの概念はその下の Kisin 加群の高さで定義する．

注意 17. (1) 正確には，「$W(\mathrm{Fr}R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ の weak topology の制限位相を $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に入れた時にその上の $\hat{G}$ 作用が連続」ということも Liu 加群の定義に必要．原著 [Liu3] 等には位相に関して何も触れられていないが，この連続性を仮定しないと後で述べる $\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$ が G_K 作用で連続になるとは限らない．
(2) 上の定義の条件の 2 つ目に関して，次のことに注意する：任意の Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ に対して，自然な写像 $\mathfrak{M} \to \widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ は単射なので（[CL2], §3.1 あるいは [O1], Corollary 2.13），$\mathfrak{M} \subset \widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ と見なせる．また，この 2 つ目の条件は Kisin 加群と Liu 加群に付随する表現の両立性のため（より正確には下に書いてある θ の G_∞ 作用との可換性）に必要.
(3) 上の定義の 3 つ目の条件を取り除いたものを**弱 Liu 加群**と呼ぶ．弱 Liu 加群の場合，対応する Galois 表現（Liu 加群に対応する Galois 表現については続く文章を参照）が準安定表現ではなく潜準安定表現になる（[Liu3], §4.2）．この「潜」を取り除くのが 3 つ目の条件である．

今，高さ r（resp. 高さ有限）のねじれ Liu 加群の成す圏を $\mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$（resp. $\mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$）とし，高さ r（resp. 高さ有限）の自由 Liu 加群の成す圏を $\mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}}$（resp. $\mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}}$）と書く．定義から $\mathrm{Mod}^{0,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty} \subset \mathrm{Mod}^{1,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty} \subset \cdots \subset \mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ が成り立つ．自由 Liu 加群に関しても同様である．

また，高さ r のねじれ Liu 加群はねじれ Kisin 加群の場合とは異なり，高さ r の自由 Liu 加群によるレゾリューションを持つかどうかということは分からない[5]（命題 10 を思い出そう）．Liu 加群の線形代数的性質に関しては [O1] の §2 を中心にまとめてある．

Kisin 加群の時と同様に，与えられた Liu 加群に付随して G_K の Galois 表現が構成できることについて述べる．反変関手 $\hat{T}\colon \mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ を

$$\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}}) := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{R}},\varphi}(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}, W(R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

で定義する．ここで G_K 作用は $(\sigma.f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x))$（$\sigma \in G_K, f \in T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}),\ x \in \mathfrak{M}$）で定義する．同様に，$\hat{T}\colon \mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ を

$$\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}}) := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{R}},\varphi}(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}, W(R))$$

で定義する．

Liu 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$ と $f \in T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$ に対して $\theta(f) \in \hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$ が $\theta(f)(a \otimes x) := a\varphi(f(x)), a \in \widehat{\mathcal{R}}, x \in \mathfrak{M}$ で定義できる．こうして得られる

$$\theta\colon T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) \to \hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$$

[5] この後述べる定理 18 と [CL2] の Theorem 5.4 の観点からすると一般には存在しないように思う．高さ有限な Liu 加群によるレゾリューションならばあるかもしれない．

は G_∞ 加群としての同型になることが分かる（[Liu3], Lemma 3.1.1, [CL2], Theorem 3.1.3）.

自由 Liu 加群に関しては次が成りたち，これが Liu 加群に関する議論の全ての原点となった：$\mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ を Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下の準安定 p 進表現の格子の成す圏とする.

定理 18 ([Liu3], Theorem 2.3.1)**.** $\hat{T}\colon \mathrm{Mod}^{\infty,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ は圏同値

$$\mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$$

を導く.

一方でねじれ表現の場合はどうなっているかというと，Kisin 加群の命題 12 (1) の場合とまったく同様の性質が成り立つ.

命題 19 (前半：[CL2],[Liu3], 後半：[Liu2], [O1])**.** $\hat{T}\colon \mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ は完全かつ忠実．$er < p-1$ の時は充満忠実.

証明は，前半は [O1], Corollary 2.8 に書いてある．後半の証明は少なくとも二つある．一つは命題 12 を用いる方法であり，これに [O1] の Lemma 4.2 (1), (2) を合わせれば簡単に証明できる．[O1] の Corollary 5.34 にも同じ主張は書いてあるがこれは Liu 加群の極大極小理論から得られる系であり，手法はまた別である.

例 20 ([Liu3]，Example 3.2.3)**.** $\hat{G}$ 作用の定義の簡略化のため $p>2$ とする．$r \geq 0$ を整数とする．$pc_0 = E(0)$ で $c_0 \in W(k)^\times$ を定義し，また，$c = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\frac{\varphi(c_0^{-1}E(u))}{p})$，$\hat{c} = \frac{c}{\tau(c)} = \prod_{n=1}^{\infty}\varphi^n(\frac{E(u)}{\tau(E(u))})$ とすると $c \in A^\times_{\mathrm{cris}}$，$\hat{c} \in \widehat{\mathcal{R}}^\times$ が分かる．$W(R) \setminus pW(R)$ の元 $\mathfrak{t}$ で，$\varphi(\mathfrak{t}) := c_0^{-1}E(u)\mathfrak{t}$ を満たすものが $\mathbb{Z}_p^\times$ 倍を除いて一意に存在するのでそれを一つ固定する．今，$\hat{\mathfrak{S}}(r)$ を $\mathfrak{t}^r$ で生成される階数 1 高さ r の自由 Kisin 加群 $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{t}^r$ に，$\hat{G}$ 作用を（自然な埋め込み $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{t}^r \subset \widehat{\mathcal{R}}\otimes_{\varphi,\mathfrak{S}}(\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{t}^r)$ によって $\mathfrak{t}^r$ を $\widehat{\mathcal{R}}\otimes_{\varphi,\mathfrak{S}}(\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{t}^r)$ の元として見たときに）$\tau(\mathfrak{t}^r) := \hat{c}^r\cdot\mathfrak{t}^r$ で定義したものとすれば，これは高さ r の自由 Liu 加群になる．更に，$\hat{T}(\hat{\mathfrak{S}}(r)) = \mathbb{Z}_p(r)$ が確認できる．上と同様にして，高さ r のねじれ Liu 加群 $\hat{\mathfrak{S}}_n(r)$ で $\hat{T}(\hat{\mathfrak{S}}_n(r)) = \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p(r)$ を満たすものが得られる.

Kisin 加群の時と同様に，Liu 加群にも Cartier 双対定理があり，それは Kisin 加群の Cartier 双対定理と両立している（[O1], §3）.

Breuil 加群との対応：高さ r の自由 Liu 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$ と定理 18 によってそれに対応する $T \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ をとった時に，次のようにして $V = T[1/p]$ に対応する Breuil 加群 $\mathfrak{D}$ が構成できる[6]：S_{K_0} 加群としては $\mathfrak{D} := S_{K_0}\otimes_{\varphi,\mathfrak{S}}\mathfrak{M}$ で，$\varphi_{\mathfrak{D}} := \varphi_{S_{K_0}}\otimes\varphi_{\mathfrak{M}}$，減少フィルトレーション $(\mathrm{Fil}^r\mathfrak{D})_{i\in\mathbb{Z}}$ は $\mathrm{Fil}^r\mathfrak{D} := \{m \in \mathfrak{D}; (1\otimes\varphi)(m) \in \mathrm{Fil}^i S_{K_0}\otimes\mathfrak{M})\}$ で与える．最後に，モノドロミーを Liu 加群の構造を用いて表記しよう．モノドロミーの存在自体は Breuil の理論か

[6] ここでいう Breuil 加群とは以下の情報を持つ有限自由 S_{K_0} 加群 $\mathfrak{D}$ のことをいう（[Bre1], §6.1）：(1) $\varphi_{S_{K_0}}$ 半線形写像 $\varphi\colon \mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ で determinant が S_{K_0} の中で可逆；(2) $\mathfrak{D}$ の部分 S_{K_0} 加群による減少フィルトレーション $(\mathrm{Fil}^i\mathfrak{D})_{i\in\mathbb{Z}}$ で $\mathrm{Fil}^0\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$，$\mathrm{Fil}^iS_{K_0}\cdot\mathrm{Fil}^j\mathfrak{D} \subset \mathrm{Fil}^{i+j}\mathfrak{D}$；(3) K_0 線形写像 $N\colon \mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ で，次の (a) 〜 (c) を満たすもの；(a) $f \in S_{K_0}$，$m \in \mathfrak{D}$ に対して，$N(fm) = N(f)m + fN(m)$, (b) $N\varphi = p\varphi N$, (c) $N(\mathrm{Fil}^i\mathfrak{D}) \subset \mathrm{Fil}^{i-1}\mathfrak{D}$.

ら分かっているので（1 節を参照）それを $N_{\mathfrak{D}}$ とする．$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{S_{K_0}} \mathfrak{D} = B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\widehat{\mathcal{R}}} (\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \hat{\mathfrak{M}})$ の右辺には左辺の Liu 加群としての構造を経由して G_K 作用が入るが，そのとき，[Liu3] § 3.2 の議論より

$$g(a \otimes x) = \sum_{i=0}^{\infty} g(a)\gamma_i(-\log([\underline{\varepsilon}(g)])) \otimes N_{\mathfrak{D}}^i(x),\ g \in G_K,\ a \in B_{\mathrm{cris}},\ x \in \mathfrak{D}$$

という関係式を得ることが分かる．すると $n \geq 0$ に関する帰納法により $x \in \mathfrak{D}$ に対して

$$(\tau-1)^n(x) = \sum_{m=n}^{\infty}\Big(\sum_{i_1+i_2+\cdots i_n=m, i_j\geq 1} \frac{m!}{i_1!\cdots i_n!}\Big)\gamma_m(t) \otimes N_{\mathfrak{D}}^m(x)$$

が分かるから，$\log(\tau)(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\tau-1)^n}{n}(x)$ と置けば

$$\log(\tau)(x) = t \otimes N_{\mathfrak{D}}(x).$$

よって，$N_{\mathfrak{D}} := \frac{1}{t}\log(\tau)\colon \mathfrak{D} \to B_{\mathrm{cris}} \otimes_{S_{K_0}} \mathfrak{D}$ と置けばこれは $\mathfrak{D}$ に値をとり，こうして $N_{\mathfrak{D}}$ を得る．

フィルター付き (φ, N) 加群との対応：（文献は [Bre1], §6.）引き続き同じ記号を用いる．V に対応するフィルター付き (φ, N) 加群 D は次のようにあらわされる．$D := \mathfrak{D}/I_+S_{K_0}\mathfrak{D}$ とし，$\varphi_D := \varphi_{\mathfrak{D}} \bmod I_+S_{K_0}\mathfrak{D}$，$N_D := N_{\mathfrak{D}} \bmod I_+S_{K_0}\mathfrak{D}$ とする．また，$D_K := K \otimes_{K_0} D$ の減少フィルトレーションを，射 $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}/\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} D \simeq D_K$ における $\mathrm{Fil}^i\mathfrak{D}$ の像を $\mathrm{Fil}^i D_K$ と置くことで定義する．N_D は次のような解釈もできる．自然な射影 $\mathfrak{D} \to D$ に対してフロベニウスと可換なただ一つのセクション $s\colon D \hookrightarrow \mathfrak{D}$ が存在する（[Bre1], Proposition 6.2.1.1）．この s を経由して $D \subset \mathfrak{D}$ と見なすと，$N_D = N_{\mathfrak{D}}|_D$ が成立する．更に，$D = \mathfrak{D}/I_+S_{K_0}\mathfrak{D} \simeq K_0 \otimes_{W(k)} (\varphi^*\mathfrak{M}/u\varphi^*\mathfrak{M})$（ここで，$\varphi^*\mathfrak{M} := \mathfrak{S} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$）かつ $S_{K_0} \otimes_{K_0} D = \mathfrak{D}$ なので，$\varphi^*\mathfrak{M}$ の $\mathfrak{S}$ 基底をとれば,（s を経由して）それは $\mathfrak{D}$ の基底となる．

D と $\hat{\mathfrak{M}}$ についてのより詳しい情報は [Liu4] などにある．

クリスタリン表現に付随する Liu 加群について分かっていることを述べようと思う．以下，$p > 2$ と仮定する．

定理 21 ([GLS], Proposition 5.9)**.** $T \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{st},r}(G_K)$ がクリスタリンであるとし，$\hat{\mathfrak{M}}$ を定理 18 によって対応する自由 Liu 加群とする．このとき，任意の $x \in \mathfrak{M} \subset \widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に対して，$\tau(x) - x \in u^p\varphi(\mathfrak{t})(W(R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ が成り立つ．ここで，$\mathfrak{t}$ は例 20 で出てきたもの.

[GLS] では「K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大」となっているが，上の定理はそうでない場合にも成り立つことを注意しておく．

では，ねじれクリスタリン表現に関してはどうだろうか．まずそもそも，ねじれ準安定表現やねじれクリスタリン表現があるねじれ Liu 加群の表現として表せるのかという問題があるが，それは正しい．前節で $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{cris},r}(G_K)$ を Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下のねじれクリスタリン表現からなる $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ の充満部分圏として定義したが，同様に $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{st},r}(G_K)$ を Hodge-Tate 重み 0 以上 r 以下のねじれ準安定表現からなる圏とする．

定理 22 ([CL2], Theorem 3.1.3, [GLS], Theorem 5.2)**.** $T \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ が G_K の表現の完全列

$$(S)\colon 0 \to L \to L' \to T \to 0$$

（$L, L' \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$）を満たしているとする．このとき，高さ r の Liu 加群の完全列

$$0 \to \hat{\mathfrak{L}}' \to \hat{\mathfrak{L}} \to \hat{\mathfrak{M}} \to 0$$

で，$\hat{T}$ でうつすと (S) と同型になるものが一意的に存在する．

注意 23. 上の定理に於いて $T \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{st},r}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ に対する $\hat{\mathfrak{M}}$ の取り方は完全列 (S) を選ぶ毎に一意に定まる．$T = \hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$ となる $\hat{\mathfrak{M}}$ は一意には定まらないことに注意する（定理 19 より “$er < p-1$ かつ高さ r の Liu 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$” ならば一意に定まる）．例えば $K = \mathbb{Q}_p(\mu_p)$ で $T = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ が自明な表現のときは例 20 に出てきたねじれ Liu 加群 $\hat{\mathfrak{S}}_1$，$\hat{\mathfrak{S}}_1(1)$ を用いると，この二つは Liu 加群としては同型ではないが $T = \hat{T}(\hat{\mathfrak{S}}_1) = \hat{T}(\hat{\mathfrak{S}}_1(1))$ である．

上記の二つの定理 21, 22 を合わせると，次の定理が直ちに従うことが確認できる．

定理 24. $T \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},r}_{\mathrm{tor}}(G_K)$ とし，$\hat{\mathfrak{M}}$ を定理 22 の L, L' をクリスタリンであるようにとった時に同定理から得られる高さ r のねじれ Liu 加群とする．このとき，任意の $x \in \mathfrak{M} \subset \widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に対して，$\tau(x) - x \in u^p\varphi(\mathfrak{t})(W(R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ が成り立つ．

さて，$\hat{\mathfrak{M}} \in \mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ で

『任意の $x \in \mathfrak{M} \subset \widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に対して，$\tau(x) - x \in u^p\varphi(\mathfrak{t})(W(R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ が成り立つ』

ようなものたちの成す $\mathrm{Mod}^{r,\hat{G}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ の充満部分圏を $\mathrm{Mod}^{r,\hat{G},\mathrm{cris}}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ と書くことにする．定理 24 と [O1], §3（あるいは§5）を用いることで次の命題が示される．これが本稿の主結果の証明における鍵となった．

命題 25 ([O2], Lemma 7)**.** $e(r-1) < p-1$ とする．このとき,（$\hat{G}$ 作用を忘れることにより得られる）忘却関手

$$\mathrm{Mod}^{r,\hat{G},\mathrm{cris}}_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Mod}^{r}_{/\mathfrak{S}_\infty}$$

は充満忠実.

この命題に [CL1] の主結果を合わせることで定理 2 を得ることができた.

参考文献

[Bre1] Christophe Breuil, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Ann. **307**, 191–224 (1997).

[Bre2] Christophe Breuil, *Une application du corps des normes*, Compos. Math. **117** (1999) 189–203.

[Bre3] Christophe Breuil, *Integral p-adic Hodge theory*, in Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, 51–80.

[CL1] Xavier Caruso and Tong Liu, *Quasi-semi-stable representations*, Bull. Soc. Math. France, **137** (2009), no. 2, 185–223.

[CL2] Xavier Caruso and Tong Liu, *Some bounds for ramification of p^n-torsion semi-stable representations.* J. Algebra, **325** (2011), 70–96.

[Fon] Jean-Marc Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux. I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., **87**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 249–309.

[GLS] Toby Gee, Tong Liu and David Savitt, *The Buzzard-Diamond-Jarvis conjecture for unitary groups*, preprint, available at http://arxiv.org/abs/1203.2552

[Kim] Wansu Kim, *The classification of p-divisible groups over 2-adic discrete valuation rings*, preprint, available at http://arxiv.org/abs/1007.1904

[Kis1] Mark Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math. **253**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (2006), 459–496.

[Kis2] Mark Kisin, *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 3, 1085–1180.

[Lau] Eike Lau, *A relation between Dieudonné displays and crystalline Dieudonné theory*, available at http://arxiv.org/abs/1006.2720

[Liu1] Tong Liu, *Torsion p-adic Galois representations and a conjecture of Fontaine*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40** (2007), no. 4, 633–674.

[Liu2] Tong Liu, *On lattices in semi-stable representations: A proof of a conjecture of Breuil*, Compos. Math. **144** (2008), no. 1, 61–88.

[Liu3] Tong Liu, *A note on lattices in semi-stable representations*, Math. Ann. **346** (2010), 117–138.

[Liu4] Tong Liu, *Lattices in filtered (φ, N)-modules*, preprint, appear at J. Inst. Math. Jussieu 2.

[Liu5] Tong Liu, *The correspondence between Barsotti-Tate groups and Kisin modules when* $p = 2$, preprint.

[O1] Yoshiyasu Ozeki, *Torsion representations arising from $(\varphi, \hat{G})$-modules*, available at http://arxiv.org/abs/1202.1858

[O2] Yoshiyasu Ozeki, *Full faithfulness theorem for torsion crystalline representations*, available at http://arxiv.org/abs/1206.4751

[Tsu] Takeshi Tsuji, *Introduction to the theory of Fontaine on p-adic Galois representations*, 数理解析研究所講究録, 1097 巻, 1999 年 1–26.